REVISION DE LOS MODELOS ESTADISTICOS DE LA DISTRIBUCION DE MAGNITUDES. AVANCES.

Pablo Palacios P.(1) Juan Carlos García N. (1) Indira Molina. (2) Mónica Segovia. (2)

(1) Universidad De Las Américas – Departamento de Matemática - Quito
(2) Escuela Politécnica Nacional – Instituto Geofísico - Quito

PALABRAS CLAVES: Parámetro *b*, modelo, distribución, magnitud, supuesto.

RESUMEN

Han transcurrido aproximadamente 50 años desde que Gutenberg-Richter propuso la distribución de frecuencia de magnitudes. Hasta la fecha diferentes autores han presentado estudios y modelos que buscan estar de acuerdo con los datos reales. Realizar un estudio comparativo de los supuestos con los que trabajan los modelos propuestos, es esencial para desarrollos posteriores. Con este objetivo aquí se presentan los primeros avances. Se ha encontrado que el modelo de Bender (1983) para datos agrupados por clases es un caso particular del modelo de Weichert (1980) para datos agrupados y tiempos de observación variables. Lomnitz-Adler y Lomnitz (1979) intentaron deducir la relación de Gutenberg-Richter, a partir de consideraciones físicas más elementales. Kijko (1982) realizó observaciones importantes al modelo de Lomnitz-Lomnitz, sustituyendo también los supuestos, pero las objeciones realizadas por él no son suficientes para rechazar el modelo de Lomnitz-Lomnitz. Por último, se presentan las principales dificultades de tipo estadístico que tendría cualquier modelo truncado de distribución de frecuencias de magnitud, como los mencionados anteriormente.

A REVIEW OF STATISTIC MODELS OF THE MAGNITUDE DISTRIBUTION. AN ADVANCE.

Pablo Palacios P.(1) Juan Carlos García N. (1) Indira Molina. (2) Mónica Segovia. (2)

(1) Universidad De Las Américas – Departamento de Matemática - Quito
(2) Escuela Politécnica Nacional – Instituto Geofísico - Quito

KEY WORDS: *b* parameter, model, distribution, magnitude, assumptions.

ABSTRACT

Fifty years, approximately, have elapsed from the publication of the magnitude frequency distribution of Gutenberg-Ricther. Models and studies, that search be in agreement with real data, have been made by some authors. To compare the assumptions of the models is essential for future developments. With this goal, here the first advance is presented. The Bender (1983) model for magnitude grouped data, have been found as a particular case of Weichert (1980) model for unequal observation periods. Lomnitz-Adler and Lomnitz (1979) made a deduction of Gutenberg-Richter relation from some physical considerations. Kijko (1982) pointed important observations to the Lomnitz-Lomnitz model, and then Kijko change the assumptions, but that change in not sufficient for reject the Lomnitz-Lomnitz model. Finally, it is presented important statistical difficulties in any truncated model of magnitude frequency distribution for those mentioned before.

INTRODUCCIÓN

La historia de la ciencia es como una saga, donde en lugar de haber muchas aventuras que convergen en un héroe, hay muchos héroes y una sola aventura (W. Berkson, 1974).

Este pensamiento de William Berkson, un historiador de la ciencia, refleja la intención y la visión con la que se ha realizado el presente artículo. Particularmente nos interesa el planteamiento, desarrollo y evolución de las ideas relacionadas con los modelos de distribución de la frecuencia de sismos.

Existen varios autores y trabajos relacionados con este tema por lo cual realizar una revisión completa de los supuestos asumidos por cada uno de ellos, la relación entre dichos estudios, el descubrir las limitaciones, aciertos y errores, sin duda implica un esfuerzo de gran envergadura. Las ideas aquí presentadas no constituyen un trabajo completo. Se revisan los modelos de Weichert (1980) y Bender (1983), así como los de Lomnitz-Adler y Lomnitz (1979) y Kijko (1982). Los dos primeros artículos son los más usados cuando se trata de estimar el parámetro b con muestras agrupadas por clases, mientras que en los dos últimos artículos se busca las causas físicas que justifiquen el comportamiento lineal del modelo de Gutenberg-Richter.

Lo aquí expuesto son sólo avances de un estudio que es deseable sea más completo y que se hace indispensable por el simple hecho de aportar con una visión global del problema, situación que a otros autores les puede despejar el camino en la búsqueda de respuestas a cuestiones pendientes, o de nuevos modelos más afines con la realidad.

Además no nos hemos limitado a realizar exclusivamente una presentación de las ideas ya planteadas por los autores antes mencionados. Existen muchos detalles, no desarrollados en los artículos, y que se los indicará más adelante.

LOS MODELOS DE WEICHERT (1980) Y BENDER (1983)

Después de que Gutenber y Richter propusieran una relación lineal para el logaritmo del número de sismos superiores a cierta magnitud, dada por la expresión $\log N(m) = a - bm$, Aki (1965) estima el valor del parámetro b mediante el método de máxima verosimilitud. Siguiendo los pasos de Utsu plantea un modelo con un valor mínimo para las magnitudes y una función de distribución que no admite una magnitud finita máxima. Page (1968) incluye en la estimación del parámetro b una cota máxima a las magnitudes.

La característica común en los modelos de Aki y Page es que se basan en distribuciones continuas, lo cual implica un altísimo grado de exactitud en la determinación de la magnitud de los sismos. En contraste a esta situación Weichert y Bender reconocen el hecho de que el valor de la magnitud de un sismo incluye un rango de error, lo cual da lugar a la necesidad de construir clases para diferenciar unos de otros.

Weichert (1980) supuso un modelo truncado, con cotas inferior y superior, para la magnitud de los sismos. Además, que la probabilidad de obtener un sismo en una determinada clase sería proporcional a la exponencial $\exp(-\beta m)$ y también proporcional al tiempo de observación sobre cada clase, por lo que dicha probabilidad toma la forma:

$$p_i = \frac{t_i \exp(-\beta m_i)}{\sum_{j=1}^{n} t_j \exp(-\beta m_j)}$$

La ventaja de este modelo es que permite realizar análisis con tiempos de observación distintos. Por ejemplo, los tiempos de observación históricos de sismos de bajas magnitudes son menores, por cuanto no se disponían algunas décadas atrás de equipos con la sensibilidad de los actuales.

Bender (1983) supuso también un modelo truncado inferior y superiormente, pero no incluyó la posibilidad de tiempos de observación distintos. Si no hay más modificaciones en los supuestos, cabe esperar que el modelo de Bender, pese a ser posterior al de Weichert, sea un caso particular de éste. De hecho así ocurre. Para demostrarlo sólo tiene que considerarse que la probabilidad de que una magnitud pertenezca a una clase dada, en el modelo de Bender viene dada por:

$$p_i = \frac{\exp(-i\beta\delta)(\exp(\beta\delta) - 1)}{(1 - \exp(-\beta\delta n))}$$

donde δ es el ancho de cada clase. La deducción es directa si en la expresión de Weichert se toman tiempos iguales y las magnitudes m_i (centros de cada clase) definidas por la expresión:

$$m_i = m_o - \frac{\delta}{2} + i\delta \qquad ; \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Como la función de verosimilitud depende integramente de la probabilidad sobre cada clase, todo lo deducido en el modelo de Bender, es deducible en el modelo de Weichert. Sin embargo la metodología de análisis seguida por Bender es mucho más clara que la de Weichert. Por esta razón a continuación se expone los pasos claves del análisis del modelo de Weichert, siguiendo los caminos sugeridos por Bender, para obtener el valor del parámetro b y su función de distribución.

La función de verosimilitud del modelo de Weichert puede escribirse de la forma:

$$l(\beta) = \sum_{i=1}^{n} k_i \ln(t_i) - N\delta\left(\frac{j}{N} + 1\right)\beta - N \ln\left(\sum_{i=1}^{n} t_i e^{-i\beta\delta}\right) + \ln\left(\frac{N!}{k_1! \cdots k_n!}\right)$$

donde j es la definición dada por Bender: $j = \sum_{i=1}^{n}(i-1)k_i$, N es el número total de sismos en la región del catálogo completo y las cantidades k_i las frecuencias de sismos sobre cada clase. Para analizar la función de verosimilitud y además obtener la estimación del parámetro b, son necesarias su primera y segunda derivada:

$$l'(\beta) = -N\delta\left[\left(\frac{j}{N} + 1\right) - \frac{\sum_{i=1}^{n} i\, t_i\, e^{-i\beta\delta}}{\sum_{i=1}^{n} t_i\, e^{-i\beta\delta}}\right]$$

$$l''(\beta) = -\frac{N\delta^2}{2} \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_i t_j q^{i+j}(i-j)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i q^i\right)^2}$$

donde la cantidad $q = e^{-\beta\delta}$.

La segunda derivada (una forma bilineal simétrica respecto de los tiempos) es una cantidad siempre negativa para tiempos positivos. Esto implica la presencia de un máximo, de existir algún punto crítico. Como se admiten valores β exclusivamente positivos, la función de verosimilitud tiene un borde izquierdo por la derecha de $\beta = 0$ dado por el siguiente límite:

$$l(0^+) = \sum_{i=1}^{n} k_i \ln(t_i) - N \ln \sum_{i=1}^{n} t_i + \ln \frac{N!}{k_1! \cdots k_n!}$$

el cual es un valor finito. Esto deja sólo dos posibilidades al comportamiento de la función de verosimilitud. A partir del valor $l(0^+)$ asciende para luego descender formando un máximo o, a partir de $l(0^+)$ con curvatura negativa también, desciende sin formar máximo, caso en el cual no existiría un estimador para b. Por esta razón la condición de existencia del parámetro es que la primera derivada alrededor del cero en la función de verosimilitud sea una cantidad positiva. Esta condición limita los posibles valores de j/N al siguiente rango:

$$0 < \frac{j}{N} < \frac{\sum_{i=1}^{n}(i-1)\, t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$$

que en el caso de Bender (1983) es el rango:

$$0 < \frac{j}{N} < \frac{n-1}{2}$$

Bender hace notar que los valores j/N definen los valores del parámetro β, ya que al buscar el máximo es necesario igualar la primera derivada de la función de verosimilitud a cero, debiendo resolverse la ecuación: